**1.** **Понятие множества, универсальное, пустое множество. Понятие подмножества. Способы задания множеств.**

**Множеством** называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п. Элементы множества различны и отличимы друг от друга.

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым**. Обозначение: http://abc.vvsu.ru/Books/discr_ma/obj.files/image1021.gif.

Обычно в конкретных рассуждениях элементы всех множеств берутся из некоторого одного, достаточно широкого множества U (своего для каждого случая), которое называется **универсальным** множеством (или универсумом).   
Множество А содержится в множестве В (множество В включает множество А), если каждый элемент А есть элемент В:

А ⊂ В: = x ∈ A ^ x ∈ B.

В этом случае А называется **подмножеством** В, В – надмножеством А.

Под *подмножеством* множества понимается такое множество, каждый элемент которого является элементом данного множества.

Чтобы задать множество, нужно указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать различными **способами:**

1. Перечислением элементов: М: = {а1 , а2 , …, аk };

2. Характеристическим предикатом: М: = {x | P (x)}; М - это множество тех и только тех элементов X для которых Р от Х истинное предположение.

При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми.(т.е. просто перечисление элементов ч/з запятую)

Характеристический предикат – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

**3.** **Мощность множества. Равенство множеств. Формула включений и исключений для мощности объединения множеств.**

**Мощност**ь множества М обозначается как |М|. Для конечных множеств мощность – это число элементов. Мощностью множества А называется класс всех множеств, эквивалентных множеству А (обозначается  **|А|** ).

Множества называются  *равномощными*, *эквивалентными*, если между ними есть *взаимно - однозначное* или *одно-однозначное* соответствие, то есть такое попарное соответствие. Когда каждому элементу одного множества сопоставляется один единственный элемент другого множества и наоборот, при этом различным элементам одного множества сопоставляются различные элементы другого.

Если множество А имеет ровно n элементов, то его называют **конечным** множеством, и пишут |А| = n. Таким образом, мощностью конечного множества является число его элементов.

Если А ~ N, где N = { 0, 1, 2, … } – множество натуральных чисел, то множество А называется **счетным**: |А| = N.

Общая теорема выглядит так: мощность объединения есть сумма единичных мощностей, минус сумма всех парных, плюс сумма всех троек, минус сумма всех четвёрок, и т.д. до мощности пересечения всех (с соответствующим знаком)

10e14da27a2b496b8c015145f5890acc82

**формула**, позволяющая определить мощность объединения нескольких множеств, если известны их мощности и мощности всех возможных перечислений.

Формула имеет вид:

| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |.

**5. Свойства операций над множествами.**

Пусть задан универсум U. Тогда (∀ A, B, C) A, B, C ⊆ U выполняются следующие свойства:

1. ассоциативность: A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C, A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C;

2. коммутативность: A ∪ B = B ∪ A, A ∩ B = B ∩ A;

3. закон тождеств: A ∪ ∅ = А, A ∪ U = U, A ∩ ∅ = ∅, A ∩ U = А;

4. дистрибутивность: A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C), A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C);

5. поглощение: (A ∩ B) ∪ A = А, (A ∪ B) ∩ А = А;

6. идемпотентность: A ∪ A = A, A ∩ A = A;

D:\Для учёбы\Безымянный.jpg

В качестве примера приведем доказательство дистрибутивности объединения относительно пересечения: A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C). Пусть X = A ∪ (B ∩ C), Y = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C). Надо доказать, что множества X и Y равны, то есть (a) X ⊆ Y; (b) Y ⊆ X. X ⊆ Y, если каждый элемент множества X принадлежит множеству Y.

Пусть x ∈ A ∪ (B ∩ C). Тогда возможны два случая: (a1) x ∈ A и (a2) x ∈ B ∩ C. В случае (a1) x ∈ A ∪ B и x ∈ A ∪ C; следовательно, x ∈ Y. В случае (a2) x ∈ B и x ∈ C, поэтому x ∈ A ∪ B и x ∈ A ∪ C; отсюда x ∈ Y. Из произвольности элемента x следует, что X ⊆ Y. Предложим теперь, что y ∈ Y; то есть y ∈ (A ∪ B) ∩ (A ∪ C), тогда y ∈ A ∪ B и y ∈ A ∪ C. При этом если y ∉ A, то y ∈ B и y ∈ C, значит y ∈ B ∩ C; следовательно, y ∈ A ∪ (B ∩ C). Если же y ∈ A, то y ∈ A ∪ (B ∩ C) = X. Из произвольности элемента y вытекает, что Y ⊆ X. Из (a) и (b) следует равенство X = Y.

**7. Область определения, область значений отношений. I, UA, обратные отношения.**

Область определения отношения - это множество первых координат в упорядоченных парах (a, b), а область значений - множество вторых координат.

Пусть *R*- отношение на множестве *А*: R = {(a, b) | a, b  A ^ R  А  А}. Тогда:

*Обратное*отношение:              R–1 = (а, b)  (b, а)  R.

*Тождественное*отношение:    I = (а, а)  а  А.

*Универсальное*отношение:      U = (а, b)  а  А  b А.

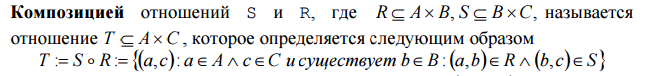
**8. Операции над отношениями. Операция композиции отношений.**

1. Объединение: R1 ∪ R2 = {(х, у) | х, у ∈ R1 ˅ х, у ∈ R2}.

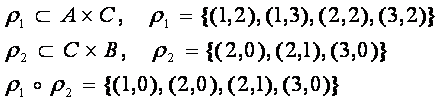
2. Пересечение: R1 ∩ R2 = {(х, у) | х, у ∈ R1 ^ х, у ∈ R2}.

3. Разность: R1 \ R2 = {(х, у) | (х, у) ∈ R1 ^ х, у ∉ R2}.

4. Дополнение (должен быть определён U):

͞r1 = {(x, y) | x, y ∈ U ^ x, y ∉ R1}, ͞r2 = {(x, y) | x, y ∈ U ^ x, y ∉ R2}.

Пример

http://www.urtt.ru/bib/dataindex/dm/glava_2~.files/image160.gif,  http://www.urtt.ru/bib/dataindex/dm/glava_2~.files/image162.gif,   http://www.urtt.ru/bib/dataindex/dm/glava_2~.files/image164.gif.



**910. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Фактор-множество.**

Бинарное отношение на множестве А называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. (\sim)

1. [Рефлексивность](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D1%84%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5): а ~ a для любого a в X,

2. [Симметричность](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BC%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5): если a ~ b, то b ~ a,

3. [Транзитивность](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B7%D0%B8%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C): если a ~ b и b ~ c, то a ~ c.

Запись вида «a ~ b» читается как «a эквивалентно b».

К отношениям эквивалентности относятся все отношения равенства чисел, множеств, || прямых. Отношения эквивалентности определяют некоторый признак по которому эти множества эквивалентны друг другу.

Пусть R – отношение эквивалентности на множестве А и a ∈ A. **Классом эквивалентности**, порожденным элементом a, называется множество {x ∈ A | xRa}. Класс эквивалентности, порожденный элементом a, будем обозначать через a / R. Совокупность всех классов эквивалентности отношения R на множестве А обозначается через А/R.

Представителем класса эквивалентности называется любой элемент этого класса.

Пусть А – непустое множество. **Фактор-множеством** множества А по отношению эквивалентности R называется множество A/R всех классов эквивалентности. По конкретному отношению эквивалентности:

A **/** Ra = {{2, 4, 6}, {3, 5}}

Rb(a % 3 = b % 3)

A **/** Rb = {{2, 5}, {3, 6}, {4}}

Если на множестве А задано отношение а = b, то количество классов равно количеству элементов.

Таким образом отношение эквивалентности:

1. Разбивает множество на непересекающиеся классы (т. е. является разбиением множества).

2. Любые 2 эл-та эквивалентны друг другу.

3. Любые 2 эл-та из разных классов не эквивалентны.

**1112. Понятие ЧУ – множества. Диаграммы Хассе.**

Пусть А ≠ ∅ и ≤ – частичный (линейный) порядок на А. Упорядоченная пара (А, ≤) называется **частично (линейно) упорядоченным множеством**. Другими словами, частично (линейно) упорядоченным множеством является непустое множество А, на котором зафиксирован некоторый частичный (линейный) порядок ≤. ([Множество](http://www.algebraic.ru/doku.php?id=glossary:set) $ S $ называется **частично упорядоченным**, если на нем задано [отношение частичного порядка](http://www.algebraic.ru/doku.php?id=glossary:relation:order#отношение_частичного_порядка).)

**Теорема**. Пусть (А, ≤) является частично упорядоченным множеством, где А – непустое и конечное множество. Тогда (А, ≤) содержит хотя бы один минимальный элемент, и если он является единственным, то он также является и наименьшим. Аналогично, (А, ≤) содержит хотя бы один максимальный элемент, и если он является единственным, то он также является наибольшим.

[Бинарное отношение](http://www.algebraic.ru/doku.php?id=glossary:relation:binary) $\preccurlyeq$ на [множестве](http://www.algebraic.ru/doku.php?id=glossary:set) А называется отношением частичного порядка, если оно удовлетворяет свойствам

1. Рефлексивности: $x\preccurlyeq x$ для всех $x\in A$;
2. Антисимметричности: $(x\preccurlyeq y)$ $\wedge$ $(y\preccurlyeq x)$ $\Rightarrow x=y$ для всех x, y ∈ A;
3. Транзитивности: $(x\preccurlyeq y)$ $\wedge$ $(y\preccurlyeq z)$ $\Rightarrow x\preccurlyeq z$ для всех x, y, z ∈ A.

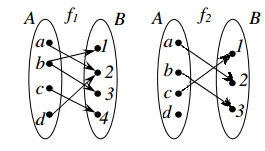
**Диаграмма Хассе** — граф/орграф, вершинами которого являются элементы множества, и если **а <= c** и нет такого **b = а (b = с)**, то вершина **а** соединяется с **c** ребром (дугой); если **а<=b<=c,** то ребро между **а** и **с** не проводится (путь от **a** к **с** идёт через **b**). Петли в диаграммах не указываются.

**1315. Понятие функций.**

**Функцией** из множества А в множество В называется бинарное отношение, при котором каждый элемент множества А связан с единственным элементом множества В(f(a) = b). Для функций, как для отношений, вводятся понятия “область определения” и “множество значений”.

Элемент множества A называется аргументом функции, элемент множества B - её значением.

Примеры не функций:

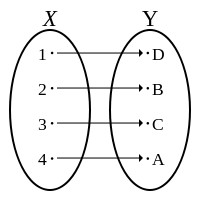
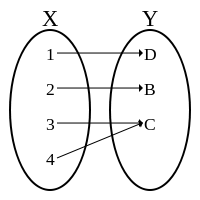
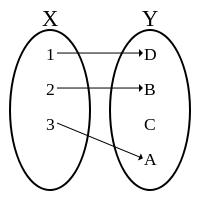


**Свойства функций: инъекция, сюръекция, биекция.**

Пусть f: A→ B – функция. Она называется **инъективной (инъекция)** или **взаимно однозначной**, если: f(a1) = f(a2) → a1 = a2 (для всех а1, а2 ∈ А). У таких функций нет повторяющихся значений. Иными словами, разные входные данные дают различные выходные данные.

Функция называется **сюръективной (сюръекция)**, если множество её значений совпадает с областью определения. Это означает, что для каждого b ∈ B найдётся такой а ∈ А, что b = f(a). Таким образом, каждый элемент области значений является образом какого-то элемента из области определения f.

Функция **биективна (биекция)**, если она как инъективна, так и сюръективна.



**Инъекция Сюръекция Биекция**

**1517. Понятие операции. Таблица Кэли для задания операции.** Говорят, что на М определена **бинарная алгебраическая операция**, если всякой упорядоченной паре элементов множества М по некоторому закону ставится в соответствие вполне определенный элемент этого же множества.

Примерами бинарных операций на множестве целых чисел являются сложение и умножение.

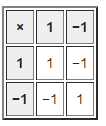
Для того, чтобы задать на [множестве](http://fxdx.ru/page/otnoshenie-porjadka-sledovanija-na-mnozhestve) А алгебраическую операцию \* необходимо выполнить два условия:

1) нужно определить правило, по которому любым двум элементам х и у множества А ставился бы в соответствие единственный для этой пары элементов (именно в этом порядке: х, у) элемент Z=X\*Y;

2) этот элемент Z=X\*Y должен принадлежать множеству А. В этом случае говорят, что множество А замкнуто относительно данной операции \*.

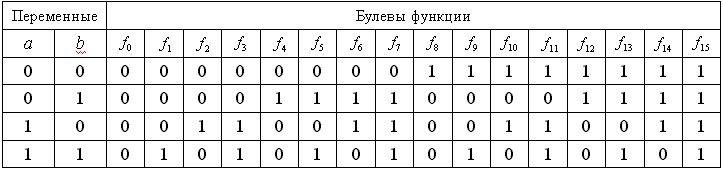
Так как по определению алгебраическая операция есть [отображение](http://fxdx.ru/page/osnovnye-algebraicheskie-struktury-1) множеств, то способы задания алгебраической операции повторяют способы задания отображения (функции): описательный, аналитический, табличный, графический и т. д.

Табличный способ задания операции, называется таблицей Кэли. Слева и сверху квадратной таблицы выписывают все элементы множества. На пересечении строки, соответствующей элементу *a*, и столбца, соответствующего элементу *b*, записывают результат операции над *a* и *b*. Если операцию называют сложением, то таблицу Кэли называют таблицей сложения. Если операцию называют умножением, то таблицу Кэли называют таблицей умножения.

 Таким образом, мы видим, что алгебраических операций, даже на конечных множествах можно определить довольно много. Конечно же не все из них представляют интерес. А интерес для нас будут представлять только те алгебраические операции, которые обладают некоторыми свойствами. Простой пример таблицы Кэли для группы {1, −1} с обычным [умножением](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5):

**1718. Понятие булевой функции. Основные булевы функции 2-х переменных.**

Пусть задано множество B = {0, 1}. Тогда, однозначное отображение f: Bn → B называется булевой функцией n переменных и ее можно записать в виде f(x1, …, xn). Совокупность значений переменных называется набором. Например, булева функция двух переменных определена на четырех наборах: (00, 01, 10, 11).

 **Общее число булевых функций** от n переменных определяется соотношением 2^(2^n). То есть для n = 2 будет 16 булевых функций. Таблица функций двух переменных a и b:

Функции f0 и f15 являются константами соответственно 0 и 1.

f1 - есть конъюнкция (логическое умножение)

14f5.jpg (3535 bytes)

14f6.jpg (5217 bytes)

14f7.jpg (1358 bytes) альтернатива (сложение по модулю 2) 14f8.jpg (711 bytes)

14f9.jpg (1050 bytes) дизъюнкция

14f10.jpg (1578 bytes) функция Вебба (или-не) 14f11.jpg (621 bytes)

14f12.jpg (1462 bytes) эквивалентность (равнозначность)

14f13.jpg (2774 bytes)

14f14.jpg (6695 bytes)

14f15.jpg (1609 bytes) функция Шеффери (и-не) 14f16.jpg (596 bytes)

19

**21. СДНФ булевой функции. СКНФ булевой функции.**

**Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ)** — это такая ДНФ, которая удовлетворяет трём условиям:

- в ней нет одинаковых элементарных конъюнкций

- в каждой конъюнкции нет одинаковых пропозициональных букв

- каждая элементарная конъюнкция содержит каждую пропозициональную букву из входящих в данную [ДНФ](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%9D%D0%A4) пропозициональных букв, причём в одинаковом порядке.

**Пример нахождения СДНФ:**

Для того, чтобы получить СДНФ функции, требуется составить её таблицу истинности. Например: таблица истинности функции эквивалентности xy имеет вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Чтобы получить совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ), надо взять все наборы, на которых значение функции равно 1 и записать для каждого из них конъюнкцию переменных и их отрицаний. Если в наборе значение переменной 0 – то переменную надо взять с отрицанием, если 1 – без отрицания. Из получившихся конъюнкций надо построить дизъюнкцию. **СДНФ имеет вид:**

****

**Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ)** — это такая [КНФ](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%9D%D0%A4), которая удовлетворяет трём условиям:

- в ней нет одинаковых элементарных дизъюнкций

- в каждой дизъюнкции нет одинаковых пропозициональных переменных

- каждая элементарная дизъюнкция содержит каждую пропозициональную букву из входящих в данную КНФ пропозициональных букв.

Любая булева формула, не являющаяся тождественно истинной, может быть приведена к единственной СКНФ.

**Пример нахождения СКНФ:**

Для того, чтобы получить СКНФ функции, требуется составить её таблицу истинности. Например: таблица истинности функции эквивалентности xy имеет вид:

**2122. Полиномом Жегалкина.**

Любую БФ n-переменных можно представить в виде полинома, т. е. в виде f(x1, x2, …, xn) = a0⊕ a1x1 ⊕ a2x2 ⊕ … ⊕ anxn ⊕ a(n+1)x1x2 ⊕ … ⊕ aNx1x2…xn, где a0, a1, a2, …, aN – коэффициенты, равные 0 или 1. Если некоторая аi = 0, то это слагаемое отсутствует.

**Полином Жегалкина** — полином с коэффициентами вида 0 и 1, где в качестве произведения берётся конъюнкция (^), а в качестве сложения исключающее или (⊕). Полином был предложен в 1927 году И. И. Жегалкиным в качестве средства для представления [функций булевой логики](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%9E%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%B1%D1%83%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%BE%D0%B9_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B8).

Полином Жегалкина однозначно определяется БФ и он единственен. Его можно построить несколькими способами, например: по таблице истинности, по СДНФ или методом треугольника.

**Построение полинома методом треугольника.**

Метод треугольника позволяет преобразовать таблицу истинности в полином Жегалкина путём построения вспомогательной треугольной таблицы в соответствии со следующими правилами:

- строится полная таблица истинности, в которой строки идут в порядке возрастания двоичных кодов от 000…00 до 111…11.

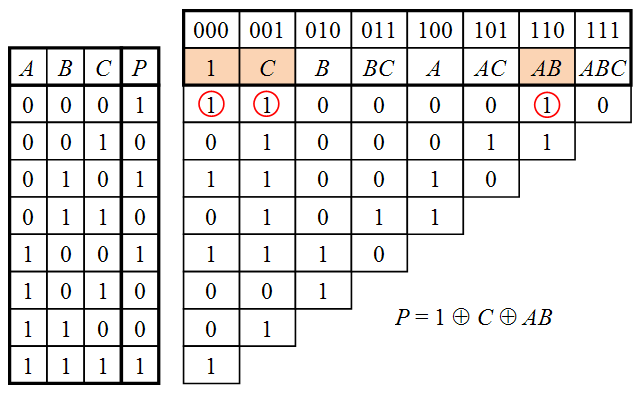
- строится вспомогательная треугольная таблица, в которой первый столбец совпадает со столбцом значений функции в таблице истинности.

- ячейка в каждом последующем столбце получается путём суммирования по модулю 2 (⊕) двух ячеек предыдущего столбца — стоящей в той же строке и строкой ниже.

- столбцы вспомогательной таблицы нумеруются двоичными кодами в том же порядке, что и строки таблицы истинности.

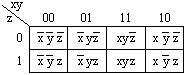
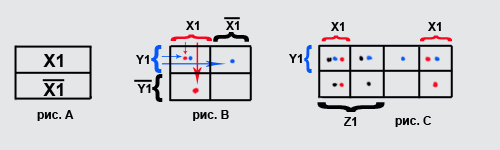
- каждому двоичному коду ставится в соответствие один из членов полинома Жегалкина в зависимости от позиций кода, в которых стоят единицы. Например, ячейке 111 соответствует член ABC, ячейке 101 — член AC, ячейке 010 — член B, ячейке 000 — член 1 и т. д.

- если в верхней строке какого-либо столбца стоит единица, то соответствующий член присутствует в полиноме Жегалкина

****

**2324. Метод Карно-Вейча минимизации булевых функций.**

Это графический способ минимизации булевых функций. Итак, карты Карно для функций 2-х и 3-х переменных выглядят вот так:

Исходным материалом для работы с данным графическим методом минимизации возьмем известную нам таблицу истинности, хотя в принципе карты Карно (диаграммы Вейча) можно назвать упрощенной таблицей истинности. Для примера используем функцию 4-х переменных.

Исходя из данной таблицы, получим СДНФ, которая будет выглядеть таким образом:   
СДНФ

Следующим шагом минимизации функции будет заполнение соответствующих клеток  карты Карно (диаграммы Вейча). Для функции 4-х переменных она имеет вид поля с ячейками четыре на четыре.

На основании СДНФ заполним соответствующие ячейки.

Далее очень важным моментом для понимания является осознание того, что данная карта не является квадратом или прямоугольником, а является цилиндром, сгибающимся как по горизонтали, так и по вертикали, а ячейки находящиеся по краям, тоже имеют соседей как слева, так и справа.

Верх и низ цилиндра тоже соседи.

**2525. Правило суммы. Правило произведения. Формула включений и исключений в комбинаторике.**

Правило суммы: если элемент А можно выбрать n различными способами и независимо от него [элемент](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82) B можно выбрать m различными способами, то выбрать все различные [комбинации](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F) элементов «A или B» можно n + m способами.   
Объем множества Х мы будем обозначать |X|.

Правило произведения: если элемент A можно выбрать n различными способами и независимо от него элемент B можно выбрать m различными способами, то все различные комбинации элементов «A и B» можно выбрать n\*m способами.

**Пример**: На первой полке стоит 10 книг, а на второй 5. Сколькими способами можно взять книги с обеих полок?

**Решение**: |X|=10, |Y|=5. По правилу произведения: |X|\*|Y|=10\*5=50.

**Ответ**: 50 способами.

Правила суммы и произведения естественным образом обобщаются и на случай комбинаций многих элементов, а именно, если первый элемент [совокупности](http://dic.academic.ru/dic.nsf/ushakov/1033406) из k различных элементов можно выбрать n1 способами, второй — n2 способами и так далее, k-й элемент — nk способами, то всевозможных комбинаций соответственно n1+n2+. . . +nk и n1\*n2\*. . . \*nk.

Факториал. Произведение первых натуральных чисел называется n-[факториал](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB) и обозначается n!; По определению: 1!=1; 0!=1.

Правило включений и исключений: если элемент А можно выбрать n различными способами и независимо от него элемент B можно выбрать m различными способами, причем множества элементов пересекаются, то выбрать все различные комбинации элементов «A или B» можно по формуле:

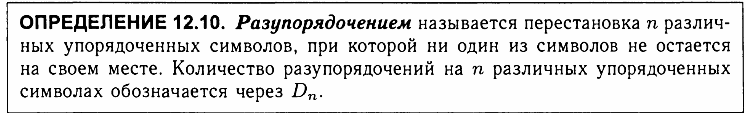
[39039ec2e08407511a8c900845a9c5dd.png](http://wiki.kgpi.ru/mediawiki/index.php/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:39039ec2e08407511a8c900845a9c5dd.png)

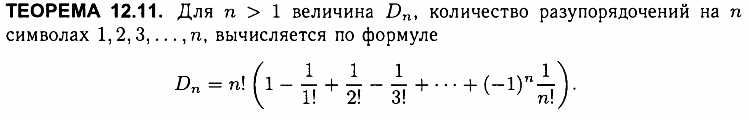
**Пример**: в классе 30 человек, каждый из которых изучает иностранный язык. 20 человек изучает английский, 15  – французский и 17  – немецкий. При этом в группах изучающих по два языка насчитывается по 10 человек. Сколько человек изучает все три языка?  
 Применяем формулу включения – исключения:  
image014

30 = 20 + 15 +17 - 10 - 10 - 10 + x, откуда  x = 8.

**2728. Перестановки. Разупорядочения.**

В [комбинаторике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0) перестановка — это [упорядоченный набор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%B6) чисел 1, 2, …, n обычно трактуемый как [биекция](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%B5%D0%BA%D1%86%D0%B8%D1%8F) на множестве {1, 2, …, n}, которая числу i ставит в соответствие i-й элемент из набора. Число n при этом называется порядком перестановки.

 Получившиеся комбинации называются перестановками, а их число равно: Pn = n! = 1\*2\*3\*...\*(n−1)\*n

**29. Сочетания.**

В [комбинаторике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0) сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов. Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от [размещений](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%BC%D0%B5%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5).

Так, например, наборы (3-элементные сочетания, подмножества, k = 3) {2, 1, 3} и {3, 2, 1} 6-элементного множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} (n = 6) являются одинаковыми (в то время как размещения были бы разными) и состоят из одних и тех же элементов {1, 2, 3}.

Число сочетаний из n по k равно [биномиальному коэффициенту](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82):

{n\choose k} = C_n^k = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}.

Сочетанием с повторениями называются наборы, в которых каждый элемент может участвовать несколько раз.

Число сочетаний с повторениями из n по k равно [биномиальному коэффициенту](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82):

\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = (-1)^{k} \binom{-n}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot (n-1)!}.

29 Так, например, чтобы вычислить значение  с помощью треугольника Паскаля, необходимо по горизонтали выбрать *7*-ю строку и *5*-ю диагональ (нумерация начинается с *0*). На пересечении имеем число 15, что и является значением искомого сочетания.

**63. Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.**

Бином Ньютона — формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных, имеющая вид:



В общем случае:(1)  
 Числа  называются *биномиальными коэффициентами*. n — неотрицательное [целое число](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE). Формула бинома Ньютона является частным случаем разложения функции (1+x)^r в [ряд Тейлора](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%8F%D0%B4_%D0%A2%D0%B5%D0%B9%D0%BB%D0%BE%D1%80%D0%B0):

(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty} {r \choose k} x^k

Используя формулу найдем (1):

.

Получили всем известную формулу. Напомним, что

.

При разложении степени  коэффициенты при произведениях , , рассчитываются по формуле:

 (число перестановок с повторениями)

и носят название *полиномиальных* или *мультиномиальных* коэффициентов.

**2. Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.**

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсум *U*, а внутри его – кругов, представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и должны быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

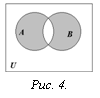
Image**Объединением** множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А, В:



**Пересечением** множеств А и В называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству А, так и множеству В : Image

 **Разностью** множеств А и В называется множество всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В :

Image



**Симметрической разностью** множеств А и В называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству А, либо только множеству В (рис. 4): A \bigtriangleup B = \left( A \setminus B \right) \cup \left ( B \setminus A \right).

**4. Прямое произведение множеств, его мощность.**

Определение. Прямым произведением  множеств X и Y называется множество Image, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары (x, y), такие, что Image.

Прямым (декартовым) произведением A1 × A2 × … × An n множеств A1, A2,…, An называется множество всех кортежей длины n (x1, x2, …, xn) таких, что x1 ∈ A1, x2 ∈ A2, …, xn ∈ An. Таким образом, по определению, A1 × A2 × … × An = {(x1, x2, …, xn) | x1 ∈ A1, x2 ∈ A2, …, xn ∈ An}.

Пусть A = {a, b, c} и B ={1, 2}. Тогда **A × B** = {(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)}; **B × A** = {(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)}; A × A = {(a, a), (b, b), (c, c)}; B × B = {(1, 1),(2, 2)}.

**Теорема о мощности прямого произведения.**

Пусть A_1, A_2, ..., A_n - конечные множества. Соответственно мощности этих множеств равны:

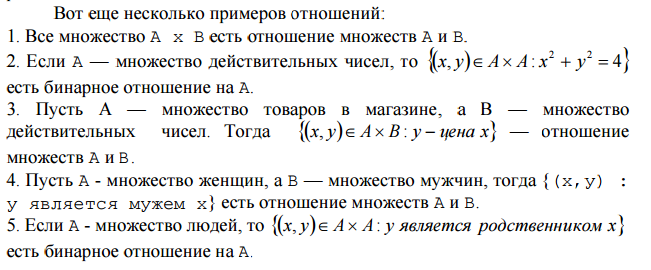
\left| A_1 \right| = m_1, \left| A2 \right| = m_2, ..., \left| A_n \right| = m_n

Тогда мощность прямого произведения n множеств равна произведению мощностей соответствующих множеств, т.е. \left| A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n \right| = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n.

\left| A^n \right| = \left| A \right|^n

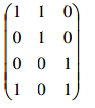
**6. Понятие отношения. Примеры отношений. Способы задания отношений.**

N-арным (n-местным) отношением P на множествах A1, A2, …, An называется любое подмножество прямого произведения A1 × A2 × …× An. В случае n = 1 отношение P называется унарным (одноместным) и является подмножеством множества A1. При n = 2 P называется бинарным (двуместным) отношением или соответствием. Если А = {1, 2, 3}, а В={r, s}, так что А х В = {(1,r), (1,s), (2,r), (2,s), (3,r), (3,s)}, то R={(1,r), (1,s), (3,s)} есть отношение множеств А и В.

****

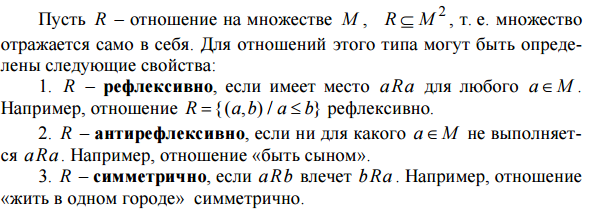
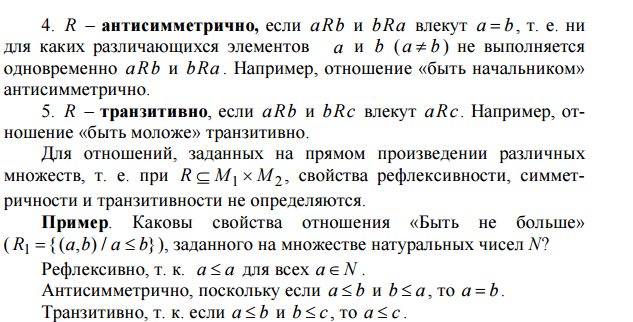
1. Перечислением пар, для которых это отношение выполняется. Например, R ={(a, b), (a, c), (b, d)}.

2. Предикатом. Например, R = {(a, b) | a, b ∈ A ^ a > b}.

 3. Матрицей отношений. Например, если A = {a, b, c, d} и B = {1, 2, 3}, то матрица задаёт отношение R = {(a, 1), (a, 2),

(b, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 3)} ⊆ A × B.

4. Направленным графом (орграфом), т. е. структурой, состоящей из вершин и дуг (направленных ребер). Элементы множеств отображаются в виде вершин графа, а отношения – в виде дуг, соединяющих эти вершины.

**89. Свойства отношений.**

**1011. Отношения порядка.**

Отношение Р ⊆ А называется предпорядком (квази-порядком), если оно рефлексивно и транзитивно.

Пример: Пусть А = {a, b, c, d}. Отношение Р = {(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, d)} на множестве А является предпорядком.

**Отношения порядка** - предусматривает порядок следования элементов на множестве(>, <, ≥, ≤).

Отношение Р ⊆ А называется **частичным (нестрогим) порядком,** если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Частичный порядок обозначается символом ≤. Частичный порядок P ⊆ А называется **линейным порядком,** если (∀ х, у ∈ А) х ≤ у или у ≤ х.

Отношение P ⊆ А называется **строгим порядком**, если оно определяется по следующему правилу: (∀ x, y ∈ A) х < у ⇔ х ≤ у и х ≠ у. Отношение строгого порядка не является частичным порядком, так как оно не рефлексивно.

[Бинарное отношение](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) R на множестве X называется **отношением полного порядка**, если оно является отношением линейного порядка и обладает следующим свойством: \forall Y \in X \exists a \in Y \forall b \in Y: aRb.

**1214. Замыкание отношений.**

Пусть на множестве А задано отношение R, которое не обладает некоторым свойством P. Тогда можно продолжить отношение R до R\*, которое будет обладать заданным свойством. Под продолжением понимается добавление к R таких пар, чтобы R выполнялось. Если R\* является минимальным из расширений R, обладающим P, то R\* - замыкание R относительно свойства P. Черты, по которым определяют замыкание:

1. R ⊂ R\*.

2. R\* обладает свойством P.

3. R\* является подмножеством любого другого [отношения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)), содержащего R и обладающего свойством P.

Другими словами, R\* — минимальное надмножество R, выдерживающее P.

Транзитивное замыкание в [теории множеств](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2) — это операция на [бинарных отношениях](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5). Транзитивное замыкание бинарного отношения R на [множестве](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) X есть наименьшее [транзитивное отношение](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B7%D0%B8%D1%82%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5) на множестве X, включающее R. Очевидный смысл замыкания R состоит в описании включения деталей друг в друга не только непосредственно, а через использование их в промежуточных деталях, например, болт используется в автомобиле, так как он используется в двигателе, а двигатель используется в автомобиле.

**1416. Счетные бесконечные множества. Несчетные бесконечные множества.**

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называют **счетными**. Другими словами, множество является счетным, если его элементы можно перенумеровать. Множество X является счётным, если существует биекция X\leftrightarrow \mathbb{N}, где {\mathbb N}обозначает множество всех натуральных чисел. Другими словами, счётное множество — это множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Счётное множество является «наименьшим» бесконечным множеством, то есть в любом бесконечном множестве найдётся счётное подмножество. Мощность множества всех натуральных чисел обозначается символом \alef_0 (произносится: "алеф-нуль").

1. Любое подмножество счётного множества не более чем счётно (т. е. конечно или счётно)
2. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно
3. Прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.
4. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.
5. Множество всех подмножеств счётного множества континуально и, в частности, не является счётным.

**Несчётное множество** — такое бесконечное множество, которое не является счётным. Таким образом, любое множество является либо конечным, либо счётным, либо несчётным. *Теорема 3. 3 (Кантора).* Множество всех действительных чисел несчетно.

**Счетные множества:** [Простые числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), [Натуральные числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), [Целые числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BB%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), [Рациональные числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%86%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), [Алгебраические числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), [Вычислимые числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B8%D0%BC%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), [Арифметические числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0), Множество всех слов над конечным алфавитом, Любое бесконечное множество точек на плоскости, все попарные расстояния между элементами которого рациональны

**Несчетные множества:** [Вещественные числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D1%89%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0)**,** [Комплексные числа](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0)**,** [Числа Кэли](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%9A%D1%8D%D0%BB%D0%B8)

16 [**Свойства**](http://fxdx.ru/page/svojstva-kompleksno-soprjazhennyh-chisel)**алгебраических операций.**

Алгебраическая операция \*, определенная на [множестве](http://fxdx.ru/page/otnoshenie-porjadka-sledovanija-na-mnozhestve) А называется **коммутативной**, если она подчиняется закону коммутативности, т. е. для любых [двух](http://fxdx.ru/page/orientacija-dvuh-koordinatnyh-osej-na-ploskosti-obshhaja-i-prjamougolnaja-dekartovaja-sistema-koordinat-na-ploskosti) элементов х и у множества А выполняется равенство: х\*у = у\*х.

Алгебраическая операция \*, определенная на [множестве](http://fxdx.ru/page/otnoshenie-porjadka-sledovanija-na-mnozhestve) А называется **ассоциативной**, если она подчиняется закону ассоциативности, т. е. для любых [трех](http://fxdx.ru/page/vzaimnoe-raspolozhenie-treh-ploskostej) элементов х, у, z множества А выполняется равенство: http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag1/image039.gif.

Пусть на [множестве](http://fxdx.ru/page/otnoshenie-porjadka-sledovanija-na-mnozhestve) А определены две алгебраических операции, которые мы обозначим символами \* и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag1/image040.gif. Говорят, что операция \* **дистрибутивна** относительно операции http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag1/image040.gif, если http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag1/image041.gif верны два равенства:

http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag1/image042.gif и http://fxdx.ru/site/fxdx_ru/uploads/ag1/image043.gif.

**Аддитивная и мультипликативная формы записи алгебраической операции.**

Наиболее распространенными обозначениями алгебраических операций являются символы « + » и « \* ». В соответствии с этими обозначениями алгебраические операции носят название [сложения](http://fxdx.ru/page/svojstva-slozhenija-vektorov) и умножения. Результат алгебраической операции называют соответственно суммой и произведением.

**Определение**. Если алгебраическую операцию называют сложением и обозначают символом [сложения](http://fxdx.ru/page/svojstva-slozhenija-vektorov) « + », то говорят, что алгебраическая операция имеет аддитивную форму записи. Если алгебраическую операцию называют умножением и обозначают символом умножения « \* », то говорят, что алгебраическая операция имеет мультипликативную форму записи.

**1819. Классы булевых функций.**

Существует 5 замкнутых классов булевых функций:

1. Т0 - класс булевых функций, сохраняющих константу 0. Все функции, значение которых на 0-ом наборе (т.е. на наборе (00…0)) равно 0 (лог. и, лог. или, сложение по модулю 2, константа-ноль)

2. Т1 - класс булевых функций, сохраняющих константу 1. Все функции, значение которых на единичном наборе (т.е. на наборе (11…1)) равно 1 (лог. и, лог. или, стрелка-пирса, константа-1)

3. TL - класс линейных функций. Булева функция называется линейной, если она может быть представлена полиномом Жегалкина степени не выше первой, т.е. представлена в виде:

****

где ** -** коэффициенты, равные 0 или 1. (отрицание, сложение по модулю 2, эквивалентность).

4. Tm – класс монотонных функций. Булева функция называется монотонной, если при любом возрастании набора переменных, значение этой переменной не убывает. (лог. и, лог. или).

5. Ts – класс самодвойственных функций. К ним относится функция отрицания. Булева функция называется самодвойственной, если на каждой паре противоположенных наборов, она принимает противоположенные значения, т.е. если выполняется условие:

****.

20 Чтобы получить совершенную конъюнктивную нормальную форму, надо взять все наборы, на которых значение функции равно 0 и записать для каждого из них дизъюнкцию переменных и их отрицаний. Если в наборе значение переменной равно 0 – то переменную надо взять без отрицания, если 1 – с отрицанием. Из получившихся дизъюнкций надо построить конъюнкцию. **СКНФ имеет вид:**

****.

**20. Теорема Поста-Яблонского. Примеры ФПС.**

Теорема о функциональной полноте (Пост - Яблонского).

Для того, чтобы система булевых функций была функционально полной необходимо и достаточно чтобы она содержала хотя бы одну функцию не:

1) сохраняющую константу ноль

2) сохраняющую константу единица

3) линейную функцию

4) монотонную функцию

5) самодвойственную функцию.

**Определение.** Множество функций N называется *функционально полной системой* (ФПС), если любая булева функция представима суперпозицией функций из N.

Договоримся опускать аргументы при перечислении функций множества N.

**Пример 1.** Множество N1 = {˅, ^, –} является функционально полной системой, так как любую булеву функцию, кроме константы 0, можно представить совершенной ДНФ, то есть суперпозицией функций из N1 а константу 0 – формулой xx.

**Пример 2.** Множество N2={^, ⊕, 1} является ФПС, так как любую булеву функцию можно представить полиномом Жегалкина, то есть суперпозицией функций из N2, а полином 0 – формулой 1 ⊕ 1.

**22**

**23. Метод Квайна минимизации булевых функций.**

Метод Квайна — способ представления функции в ДНФ или КНФ с минимальным количеством членов и минимальным набором переменных. Преобразование функции можно разделить на два этапа:

1. На первом этапе осуществляется переход от канонической формы (СДНФ или СКНФ) к так называемой сокращённой форме;

2. На втором этапе — переход от сокращённой формы к минимальной форме.

1. Первый этап (получение сокращённой формы).

Представим, что заданная функция f представлена в СДНФ. Для осуществления первого этапа преобразование проходит два действия:

1. Операция склеивания;

2. Операция поглощения.

Обе операции первого этапа могут выполняться до тех пор, пока это может быть осуществимо.

1. Второй этап (табличный, получение минимальной формы).

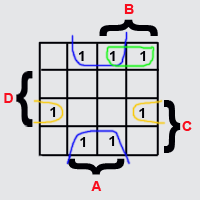
Как и на первом этапе, в полученном равенстве могут содержаться члены, устранение которых никаким образом не повлияет на конечный результат. Следующий этап минимизации — удаление таких переменных.

Для этого строим таблицу покрытия (импликантную матрицу).

Члены СДНФ заданной функции вписываются в столбцы, а в строки — простые импликанты, то есть члены сокращённой формы. Отмечаются столбцы членов СДНФ, которые поглощаются отдельными простыми импликантами.

Для того, чтобы получить минимальную дизъюнктивную нормальную форму заданной булевой функции, достаточно найти минимальное число импликант, которые совместно покрывают все единицы функции (покрывают крестиками все колонки импликантной матрицы).

МДНФ может быть несколько.

24 Принимая во внимание свойства “цилиндра” произведем заключительный этап минимизации логической функции, т. е. произведем склеивание единиц. При выполнении этого процесса количество склеиваемых единиц должно быть кратно 2 и изменять значение “истина (1)” “ложь (0)”, может только одна переменная. На рисунке также обозначим комбинации склеивания единиц (каждая склейка имеет один цвет) и количество сомножителей им соответствующее. Отобразим это все на рисунке.   
  
 Таким образом, конечное минимизированное значение функции примет следующий вид:   
Минимизированное значение функции

Однако при рассмотрении способа минимизации логической функции при помощи карт Карно, практически всегда можно встретить изображение вот такого вида. Для нашего случая это будет выглядеть так:

**2626. Понятие выборки.**

Выборка - это простейшая комбинаторная операция, применяемая к заданному множеству и состоящая в том, что из этого множества выбирается произвольный элемент. Если выбранный элемент удаляют из исходного множества, то такую операцию называют выборкой без возвращения. Если же элемент остаётся в исходном множестве, то такая выборка называется выборкой с возвращением. Выборка - неоднозначная операция в том смысле, что её результат определяется неоднозначно. Иными словами, если эту операцию применить, например, к множеству {a, b, c}, то можно получить три разных ответа - или a, или b, или c. Неоднозначностью обладают и другие комбинаторные операции.

**27. Размещения.**

В [комбинаторике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0) размещением (из n по k) называется [упорядоченный набор](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%B5%D0%B6) из k различных элементов из некоторого [множества](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE) различных n элементов.

Пример 1: \langle 1,3,2,5\rangle — это 4-элементное размещение из 6-элементного множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Пример 2: некоторые размещения элементов множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} по 2: \langle 1,2\rangle\langle 1,3\rangle\langle 1,4\rangle\langle 1,5\rangle . . . \langle 2,1\rangle\langle 2,3\rangle\langle 2,4\rangle. . . \langle 2,6\rangle. . .

В отличие от [сочетаний](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%BE%D1%87%D0%B5%D1%82%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5), размещения учитывают порядок следования предметов. Так, например, наборы \langle 2, 1, 3 \rangle и \langle 3, 2, 1 \rangleявляются различными, хотя состоят из одних и тех же элементов {1, 2, 3}(то есть совпадают как сочетания).

A_n^k = n^{\underline k} = (n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!. Количество размещений из n по k, обозначаемое A_n^k, равно [убывающему факториалу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B0%D0%BB#.D0.A3.D0.B1.D1.8B.D0.B2.D0.B0.D1.8E.D1.89.D0.B8.D0.B9_.D1.84.D0.B0.D0.BA.D1.82.D0.BE.D1.80.D0.B8.D0.B0.D0.BB):

Размещение с повторениями или [выборка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D0%B1%D0%BE%D1%80%D0%BA%D0%B0) с возвращением — это размещение «предметов» в предположении, что каждый «предмет» может участвовать в размещении несколько раз.

Количество размещений с повторениями: по [правилу умножения](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D0%BE_%D1%83%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F_%28%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B1%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BA%D0%B0%29) количество размещений с повторениями из n по k, обозначаемое \bar{A}_n^k, равно: \bar{A}_n^k =n^k.

**2832. Треугольник Паскаля.**

Треугольник Паскаля — бесконечная таблица [биномиальных коэффициентов](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%8B), имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят [единицы](http://ru.wikipedia.org/wiki/1_(%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)). Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван в честь [Блеза Паскаля](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%81%D0%BA%D0%B0%D0%BB%D1%8C,_%D0%91%D0%BB%D0%B5%D0%B7" \o "Паскаль, Блез).

Свойства:

1. Числа треугольника симметричны (равны) относительно вертикальной оси.

2. В строке с номером *n*:

- первое и последнее числа равны 1.

- второе и предпоследнее числа равны *n*.

- третье число равно [треугольному числу](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D1%80%D0%B5%D1%83%D0%B3%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) \textstyle T_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}, что также равно сумме номеров предшествующих строк.

- четвёртое число является [тетраэдрическим](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0).

*- m*-е число (при нумерации с 0) равно [биномиальному коэффициенту](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B8%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BA%D0%BE%D1%8D%D1%84%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D0%B5%D0%BD%D1%82) \textstyle\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.

3. Сумма чисел восходящей диагонали, начинающейся с первого элемента (*n* - 1)-й строки, есть *n*-е [число Фибоначчи](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE_%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8):

{n-1\choose 0}+{n-2\choose 1}+{n-3\choose 2}+\ldots=F_n.

4. Если вычесть из центрального числа в строке с чётным номером соседнее число из той же строки, то получится [число Каталана](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE_%D0%9A%D0%B0%D1%82%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D0%B0).

5. Сумма чисел *n*-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.

6. Все числа в *n*-й строке, кроме единиц, делятся на число *n*, если и только если *n* является [простым числом](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) (следствие [теоремы Люка](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9B%D1%8E%D0%BA%D0%B0)).

7. Если в строке с нечётным номером сложить все числа с порядковыми номерами вида 3*n*, 3*n*+1, 3*n*+2, то первые две суммы будут равны, а третья на 1 меньше.

8. Каждое число в треугольнике равно количеству способов добраться до него из вершины, перемещаясь либо вправо-вниз, либо влево-вниз.

В этом треугольнике строки соответствуют значениям *n=0, n=1, n=2* и так далее, а диагонали – значениям *k=0, k=1, k=2* и так далее (сверху вниз и слева направо).

30Например, вычислим коэффициент при произведении в разложении .

Он равен: .

***Свойства биномиальных коэффициентов.***

1.  - число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т. е. равно *n* + 1.

2.  - коэффициенты членов, равноудалённых от концов разложения, равны.

3.  - сумма всех коэффициентов разложения (*a* + *b*)*n* равна 2*n*.

4.  - это значит, что общее число сочетаний, имеющих четное число элементов, равно числу сочетаний, имеющих нечетное число элементов.

5. ,  - для каждого члена разложения сумма показателей степеней равна показателю степени бинома.